

Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 3 de sobrantes de 2007.

Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 \ln(x)$ (\ln denota la función logaritmo neperiano).

(a) [1'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \sqrt{e}$.

Solución

(a)

Estudiamos $f'(x)$

$$f'(x) = 2x \ln(x) + x^2(1/x) = 2x \ln(x) + x = x(2 \ln(x) + 1)$$

$f'(x) = 0$, $x(2 \ln(x) + 1) = 0$, de donde $x = 0$ y $\ln(x) = -1/2$, de donde $x = e^{(-1/2)} \approx 0'6$, que será el posible extremo relativo.

$x = 0$ no vale porque no está en el dominio.

Si $x < e^{(-1/2)}$, $f'(-0'5) = -0'19 < 0$, luego $f'(x) < 0$ por tanto $f(x)$ decrece en $x < e^{(-1/2)}$

Si $x > e^{(-1/2)}$, $f'(1) = 1 > 0$, luego $f'(x) > 0$ por tanto $f(x)$ crece en $x > e^{(-1/2)}$

Por definición $x = e^{(-1/2)}$ es un mínimo relativo que vale $f(e^{(-1/2)}) = e^{-1} \cdot \ln(e^{(-1/2)}) = -1/2e$

(b)

La recta tangente en $x = \sqrt{e} = e^{1/2}$, es $y - f(e^{1/2}) = f'(e^{1/2})(x - e^{1/2})$

$$f(x) = x^2 \ln(x), \quad f(e^{1/2}) = e \cdot \ln(e^{1/2}) = (1/2)e$$

$$f'(x) = x(2 \ln(x) + 1), \quad f'(e^{1/2}) = e^{1/2} \cdot (2 \ln(e^{1/2}) + 1) = 2 \cdot e^{1/2}$$

La recta tangente pedida es $y - (1/2)e = 2 \cdot e^{1/2} (x - e^{1/2})$

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 3 de sobrantes de 2007.

Considera las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = e^{x-1} \quad \text{y} \quad g(x) = e^{1-x}$$

(a) [1'25 puntos] Esboza las gráficas de f y de g y determina su punto de corte.

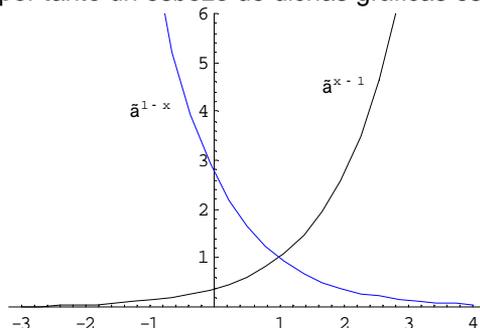
(b) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por el eje OY y las gráficas de f y g .

Solución

(a)

La gráfica de $f(x) = e^{x-1}$, es exactamente igual que la de e^x pero desplazada una unidad a la derecha en abscisas OX (en negro).

Como $g(x) = e^{1-x} = e^1 \cdot e^{-x}$ (en azul), sabemos que la gráfica de e^{-x} es exactamente igual que la de e^x pero simétrica respecto al eje de ordenadas OY, y al estar multiplicada por e , está dilatada a lo largo de dicho eje OY. En concreto si $x = 0$, $g(0) = e$, por tanto un esbozo de dichas gráficas es



Para encontrar el punto de corte igualamos las funciones $e^{x-1} = e^{1-x}$, de donde $x - 1 = 1 - x$, con lo cual el punto de corte es $x = 1$.

(b)

$$\text{Área} = \int_0^1 (e^{1-x} - e^{x-1}) \cdot dx = [-e^{1-x} - e^{x-1}]_0^1 = (-e^0 - e^0) - (-e^1 - e^{-1}) = -2 + e + (1/e) \text{ u}^2$$

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 3 de sobrantes de 2007.

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) [0'75 puntos] Determina los valores de α para los que la matriz A tiene inversa.

(b) [1'75 puntos] Para $\alpha = 1$, calcula A^{-1} y resuelve la ecuación matricial $AX = B$.

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Existe A^{-1} si su determinante es $\neq 0$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\alpha - 2 = 0, \text{ de donde } \alpha = 2/3.$$

Para $\alpha \neq 2/3$, existe A^{-1} .

(b)

Si $\alpha = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $\det(A) = 1$ con lo cual existe A^{-1}

Multiplicando por la izquierda la ecuación $AX = B$ por la matriz inversa de A , A^{-1} , tenemos $A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B$, es decir $X = A^{-1} \cdot B$

Recordamos que $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t) = (1/1) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto } X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 3 de sobrantes de 2007.

Sea "r" la recta definida por $\frac{x-2}{3} = \frac{y-k}{4} = \frac{z}{5}$ y "s" la recta definida por $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$

(a) [1'25 puntos] Halla k sabiendo que las rectas r y s se cortan en un punto.

(b) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Solución

(a)

De $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-k}{4} = \frac{z}{5}$ tomamos un punto $A(2, k, 0)$ y un vector director $\mathbf{u} = (3, 4, 5)$

De $s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$ tomamos un punto $B(-2, 1, 3)$ y un vector director $\mathbf{v} = (-1, 2, 3)$

Evidentemente las rectas se cortan o se cruzan porque los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} no son proporcionales.

Las rectas se cortan si y solo si $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$

$$\mathbf{AB} = (-4, 1-k, 3)$$

$$\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 = \begin{vmatrix} -4 & 1-k & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-4)(12-10) - (1-k)(9+5) + (3)(6+4) = 14k + 8 = 0, \text{ de donde } k = -4/7 \text{ para}$$

que las rectas se corten.

(b)

Para calcular el punto de corte C, ponemos ambas rectas en paramétricas con parámetros distintos e igualamos

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4/7 + 4t \\ z = 5t \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = -2 - m \\ y = 2 + 2m \\ z = 3 + 3m \end{cases}$$

Igualamos, en nuestro caso

$$x = x$$

$$z = z$$

$$2 + 3t = -2 - m$$

$$5t = 3 + 3m$$

Este sistema obtenemos $t = -9/14$ y $m = -29/14$, lo cual verifica $z = z$, por tanto el punto de corte es

$$C(2 - (-29/14), 1 + 2(-29/14), 3 + 3(-29/14)) = C(1/14, -44/14, -45/14)$$

El Plano pedido es, es el que pasa por el punto de corte de las rectas y tiene como vectores paralelos independientes \mathbf{u} y \mathbf{v} , es decir $\det(\mathbf{x} - \mathbf{c}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$

$$\det(\mathbf{x} - \mathbf{c}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 = \begin{vmatrix} x - 1/14 & y + 44/14 & z + 45/14 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

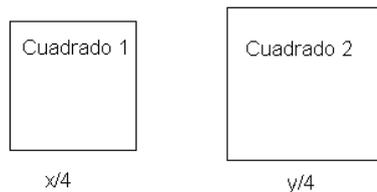
$$= (x - 1/14)(12 - 10) - (y + 44/14)(9 + 5) + (z + 45/14)(6 + 4) = 2x - 14y + 10z - 12 = 0. \text{ Simplificando nos quedaría el plano } x - 7y + 5z - 6 = 0$$

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 3 de sobrantes de 2007.

[2'5 puntos] Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio de cada uno de estos materiales es 2 y 3 euros por centímetro cuadrado, respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 metro. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo?

Solución



Cuadrado 1: Lado $x/4$, perímetro x y área $= (x/4)^2 = x^2/16$

Cuadrado 2: Lado $y/4$, perímetro y e área $= (y/4)^2 = y^2/16$

Relación entre las variables $x + y = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$. *Pasamos todo a cm.*

Función a optimizar $A = 2 \cdot (x^2/16) + 3 \cdot (y^2/16)$. Sustituyendo $y = 100 - x$

$$A(x) = x^2/8 + (3/16) \cdot (100 - x)^2$$

Recuerdo que:

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, $x = a$ es un mínimo relativo

$$A(x) = x^2/8 + (3/16) \cdot (100 - x)^2$$

$$A'(x) = 2x/8 - (6/16) \cdot (100 - x) = 2x/8 - (3/8) \cdot (100 - x) = (1/8)(2x - 300 + 3x) = (1/8)(5x - 300)$$

$$A'(x) = 0, 5x - 300 = 0, \text{ de donde } x = 300/5 = 60 \text{ cm}$$

$$A''(x) = 5/8$$

Como $A''(2/5) = 5/8 > 0$, $x = 60 \text{ cm}$ es un mínimo

Si $x = 60$, $y = 100 - x = 100 - 60 = 40 \text{ cm}$.

Los lados de los cuadrados son lado 1 $= 60/4 = 15 \text{ cm}$. y lado 2 $= y/4 = 40/4 = 10 \text{ cm}$.

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 3 de sobrantes de 2007.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(x - 3)^2$.

(a) [1 punto] Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

(b) [0'5 puntos] Haz un esbozo de la gráfica de f .

(c) [1 punto] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución

(a)

Estudiamos $f'(x)$, der donde nos saldrá el crecimiento y el decrecimiento

$$f'(x) = (x - 3)^2 + x \cdot 2 \cdot (x - 3) = 3x^2 - 12x + 9$$

$f'(x) = 0$, en nuestro caso $3x^2 - 12x + 9 = 0$, de donde $x = 1$ y $x = 3$, que serán los posibles extremos relativos.

Si $x < 1$, $f'(0) = 9 > 0$, luego $f'(x) < 0$ y por tanto $f(x)$ crece en $x < 1$

Si $1 < x < 3$, $f'(2) = -3 < 0$, luego $f'(x) < 0$ y por tanto $f(x)$ decrece en $1 < x < 3$

Si $x > 3$, $f'(4) = 9 > 0$, luego $f'(x) > 0$ y por tanto $f(x)$ crece en $x > 3$

Resumiendo $f(x)$ crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$

Por definición $x = 1$ es un máximo relativo que vale $f(1) = 4$

Por definición $x = 3$ es un máximo relativo que vale $f(3) = 0$

(b)

Para hacer un esbozo de la gráfica veamos los cortes con los ejes y el comportamiento en $\pm \infty$

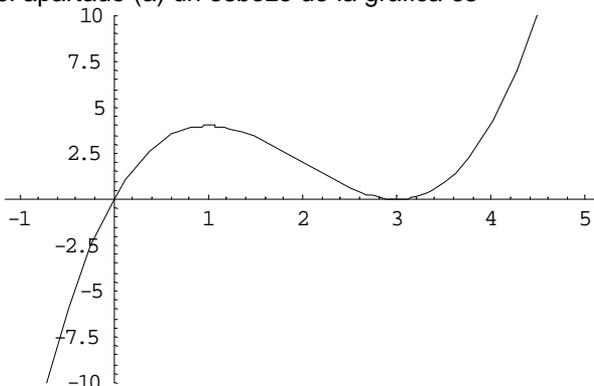
Como $f(0) = 0$, punto $(0, 0)$

Si $f(x) = 0$, obtenemos $x = 0$ y $x = 3$. Puntos de corte $(0, 0)$ y $(3, 0)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(x-3)^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x-3)^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

Por tanto teniendo en cuenta el apartado (a) un esbozo de la gráfica es



(c)

$$\text{Área} = \int_0^3 [x^3 - 6x^2 + 9x] \cdot dx = [x^4/4 - 2x^3 + (9/2)x^2]_0^3 = (3^4)/4 - 6 \cdot (27/3) + 81/2 = 27/4 u^2$$

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 3 de sobrantes de 2007.

Considera el sistema de ecuaciones

$$x + y + z = 0$$

$$2x + \lambda y + z = 2$$

$$x + y + \lambda z = \lambda - 1$$

(a) [1'5 puntos] Determina el valor de λ para que el sistema sea incompatible.

(b) [1 punto] Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

Solución

(a)

$$x + y + z = 0$$

$$2x + \lambda y + z = 2$$

$$x + y + \lambda z = \lambda - 1$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda - 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, el rango de (A) por lo menos es 2.

El sistema será incompatible si $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$

Para que $\text{rango}(A) = 2$, $|A| = 0$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \stackrel{2^a C - 1^a C}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda - 2 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \stackrel{3^a F - 1^a C}{=} (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

De $|A| = 0$, obtenemos $(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$ de donde $\lambda = 2$ y $\lambda = 1$. Luego $\text{rango}(A) = 2$

Para que rango $(A^*) = 3$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} 2^a C - 1^a C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = -3\lambda + 3$

Para que rango $(A^*) = 3$, $-3\lambda + 3 \neq 0$, resulta que $\lambda \neq 1$.

Como tiene que ocurrir que $\lambda = 2$ y $\lambda = 1$ por un lado y por el otro $\lambda \neq 1$, la única posibilidad que nos queda es $\lambda = 2$.

Se puede comprobar y ver que es incompatible con $\lambda = 2$.

(b)

Si $\lambda = 1$, ya sabemos que es compatible e indeterminado por tanto nos quedamos ya con dos ecuaciones y dos incógnitas principales

$$x + y + z = 0$$

$$2x + y + z = 2$$

$$x + y + z = 0$$

Nos quedamos con la 1ª y la 2ª

$$x + y + z = 0$$

$$2x + y + z = 2. \text{ Restando a la 2ª la 1ª, queda } x = 2$$

Hacemos $z = m$

$$2 + y + m = 0$$

$$4 + y + 2m = 2, \text{ de donde } y = -m - 2$$

Solución $(x, y, z) = (2, -2 - m, m)$ con $m \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 3 de sobrantes de 2007.

[2'5 puntos] Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $x + 2y + 3z - 1 = 0$ que corta perpendicularmente a la recta definida por $\begin{cases} x = 2z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$ en el punto $(2, 1, -1)$.

Solución (De Conchi Mérida)

Forma 1ª

Se pide calculemos una recta s contenida en el plano π y que corta a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$

perpendicularmente en el punto $P(2, 1, -1)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases}. \text{ En forma paramétrica es } r \equiv \begin{cases} x = 4 + 2m \\ y = 3 + 2m \\ z = m \end{cases}$$

d_s = vector director de s

n_π = vector normal del plano $\pi = (1, 2, 3)$

d_r = vector director de $r = (2, 2, 1)$ y P_r = punto de $r = (4, 3, 0)$

Como la recta "s" está contenida en el plano " π ", los vectores d_s y n_π son perpendiculares.

Como "s" y "r" se cortan perpendicularmente, los vectores d_s y d_r son perpendiculares. Tenemos que d_s es perpendicular a la vez a los vectores d_r y n_π , por tanto d_s es el producto vectorial de d_r y n_π , es decir

$$d_s = d_r \times n_\pi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (4, -5, 2)$$

Como "s" pasa por el punto de intersección $P(2, 1, -1)$, su ecuación paramétrica es:

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

Forma 2ª

La recta "s" pedida la vamos a dar como intersección de dos planos, uno el π y otro π' que será un plano

perpendicular a r pasando por P (la intersección de estos planos es la recta pedida porque pasa por P (que está en ambos planos) y además es perpendicular a r porque todas las rectas del plano π' son perpendiculares a r)
 $\pi' \perp r \Rightarrow$ vector normal de $\pi' = n_{\pi'} = d_r = (2,2,1) \Rightarrow \pi' : 2x + 2y + z + D = 0$ pasa por $P(2,1,-1)$

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow \pi' : 2x + 2y + z - 5 = 0$$

La recta es $s \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z - 5 = 0 \\ x + 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$

Yo lo que he hecho ha sido calcular un plano perpendicular, y no tiene porque ser perpendicular.

Plano π de ecuación $x + 2y + 3z - 1 = 0$, vector normal $\mathbf{n} = (1,2,3)$

Recta "r" $\begin{cases} x = 2z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$

El punto $(2, 1, -1)$ pertenece a la recta y al plano (se ve sustituyéndolo)

La recta "s" pedida la vamos a dar como intersección de dos planos, uno el π y para el otro formamos el haz de planos que determina la recta "r" y le imponemos la condición de que sea perpendicular al plano " π " (sus vectores normales han de ser perpendiculares es decir su producto escalar 0)

Haz de planos que determina "r"

$$(x - 2z - 4) + m(y - 2z - 3) = 0 = x + my + (-2 - 2m)z + (-4 - 3m) = 0$$

Vector normal genérico del haz de planos $\mathbf{n}' = (1, m, -2 - 2m)$

\mathbf{n} y \mathbf{n}' perpendiculares luego $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0 = (1,2,3) \cdot (1, m, -2 - 2m) = 1 + 2m - 6 - 6m = 0$, de donde $m = -5/4$.

El otro plano es $(x - 2z - 4) + (-5/4)(y - 2z - 3) = 0 = x - (5/4)y + (1/2)z - 1/4 = 0$. Multiplicando por 4 nos queda el plano $4x - 5y + 2z - 1 = 0$

La recta "s" pedida es $\begin{cases} 4x - 5y + 2z - 1 = 0 \\ x + 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$